О БИРАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ПОЛЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А.А. Бондаренко[1],

[1]Белорусский государственный университет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь bondarenko@bsu.by

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K, $char\ K \neq 2$.

Определение. Если произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m+n$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о "сумме квадратов". Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1]). В [2] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K, полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [3], над глобальным полем положительной характеристики в [4].

Основная цель настоящего сообщения — решение проблемы бирациональной композиции над полем алгебраических чисел.

Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем алгебраических чисел L в случае, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над L, следует из теоремы 1 статьи [2]. Полное решение проблемы, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные над полем L, при $1 \leq m \leq n \leq 4$, дает

Теорема. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ — анизотропные квадратичные формы размерности m и n над полем алгебраических чисел L, $1 \leq m \leq n \leq 4$. Тогда бирациональная композиция $h(Z)$ над L определена однозначно с точностью до L-эквивалентности следующим образом:*

если 1) $1 = m \leq n \leq 4$, то бирациональная композиция существует всегда и

$$h(z_1, \ldots, z_{n+1}) = ag(z_1, \ldots, z_n),$$

где $a \in D_L(f)$;

2) $m = n = 2$ и $m = n = 3$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над L, и если $m = n = 2$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = ag(z_1, z_2)$, где $a \in D_L(f)$, если $m = n = 3$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$, где $g(Y) \sim \lambda f(X)$, $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)$;

3) $m = n = 4$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над L одной и той же пфистеровой форме, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = ab(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$;

4) $m = 2$ и $n = 3$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ является с точностью до множителя над L подформой $g(Y)$, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \alpha\beta y_3^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = ab(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$;

5) $m = 2, 3$ и $n = 4$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $g(Y)$ эквивалентна с точностью до множителя над L пфистеровой форме, и $f(X)$ с точностью до множителя над L является подформой $g(Y)$, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$ при $m = 2$, $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)$ при $m = 3$, и $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2)$, то $h(z_1, \ldots, z_{m+n}) = ab(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$.

Если среди архимедовых нормирований поля L нет вещественных, то теорема полностью решает вопрос о бирациональной композиции анизотропных форм над L, ибо любая анизотропная форма над этим полем размерности ≤ 4.

Над полями алгебраических чисел, у которых есть вещественные нормирования, вопрос о бирациональной композиции анизотропных форм далек от завершения.

Литература

1. Lam K. Y. *Topological methods for studing the composition of quadratic forms* // Quadratic and hermitian forms. Conf. Proc. Providence. Rhod Island. 1984. Vol. 4. P. 173–192.

2. Бондаренко А. А. *О бирациональной композиции квадратичных форм* // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56–61.

3. Бондаренко А. А. *Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем* // Матем. зам. 2009. Т. 85. № 3. С. 661–670.

4. Бондаренко А. А. *Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций* // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 28–32.